逆三角関数とその微分

A. 逆三角関数

1. $y=\sin^{-1} x$

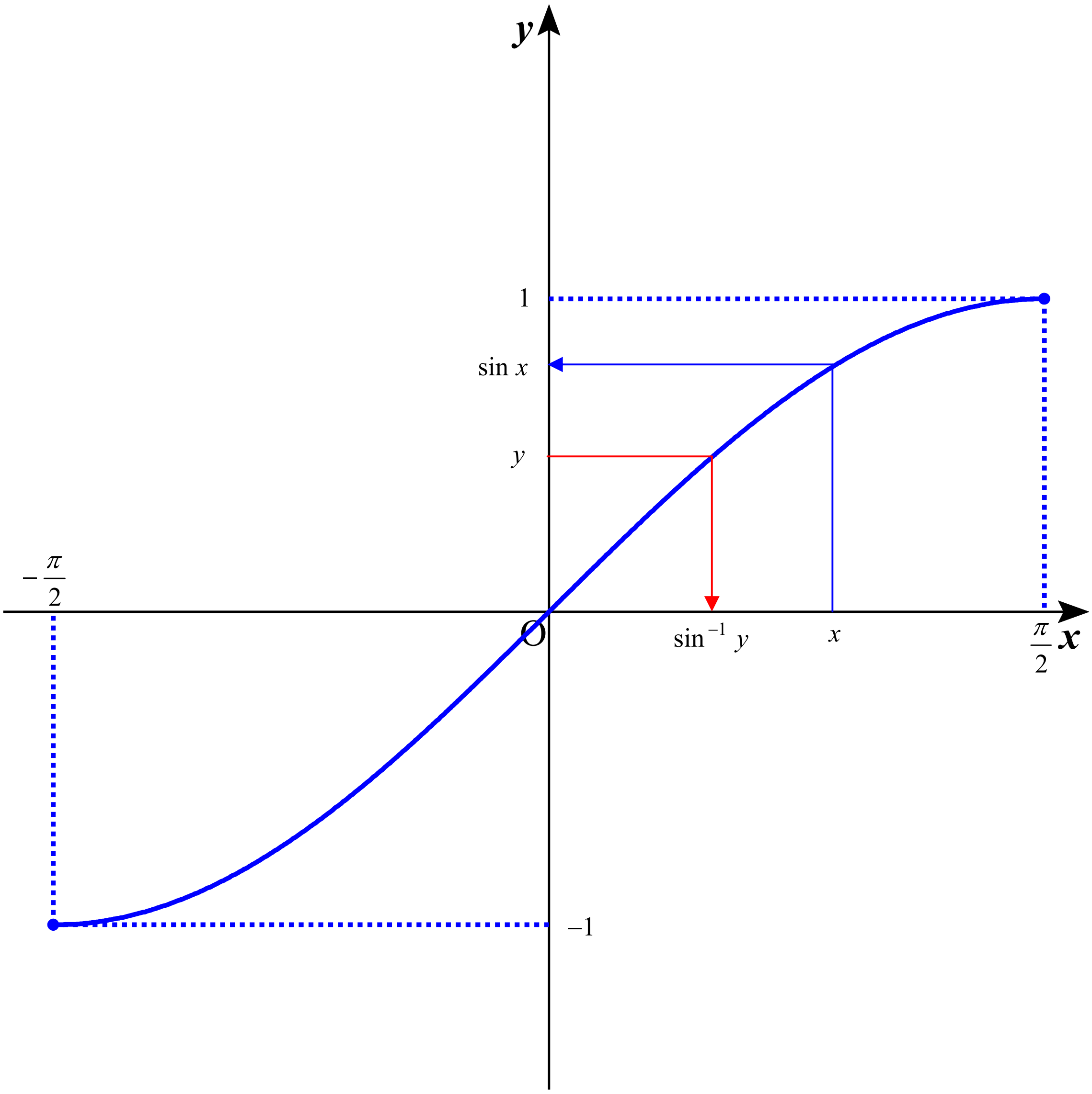
高校で学習する関数の定義に従えば，$y=\sin x$ の逆関数が存在するためには，
ある y の値に対し，ただ 1 つの x の値が対応しなければならない。

そこで，$y=\sin x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ と定め，

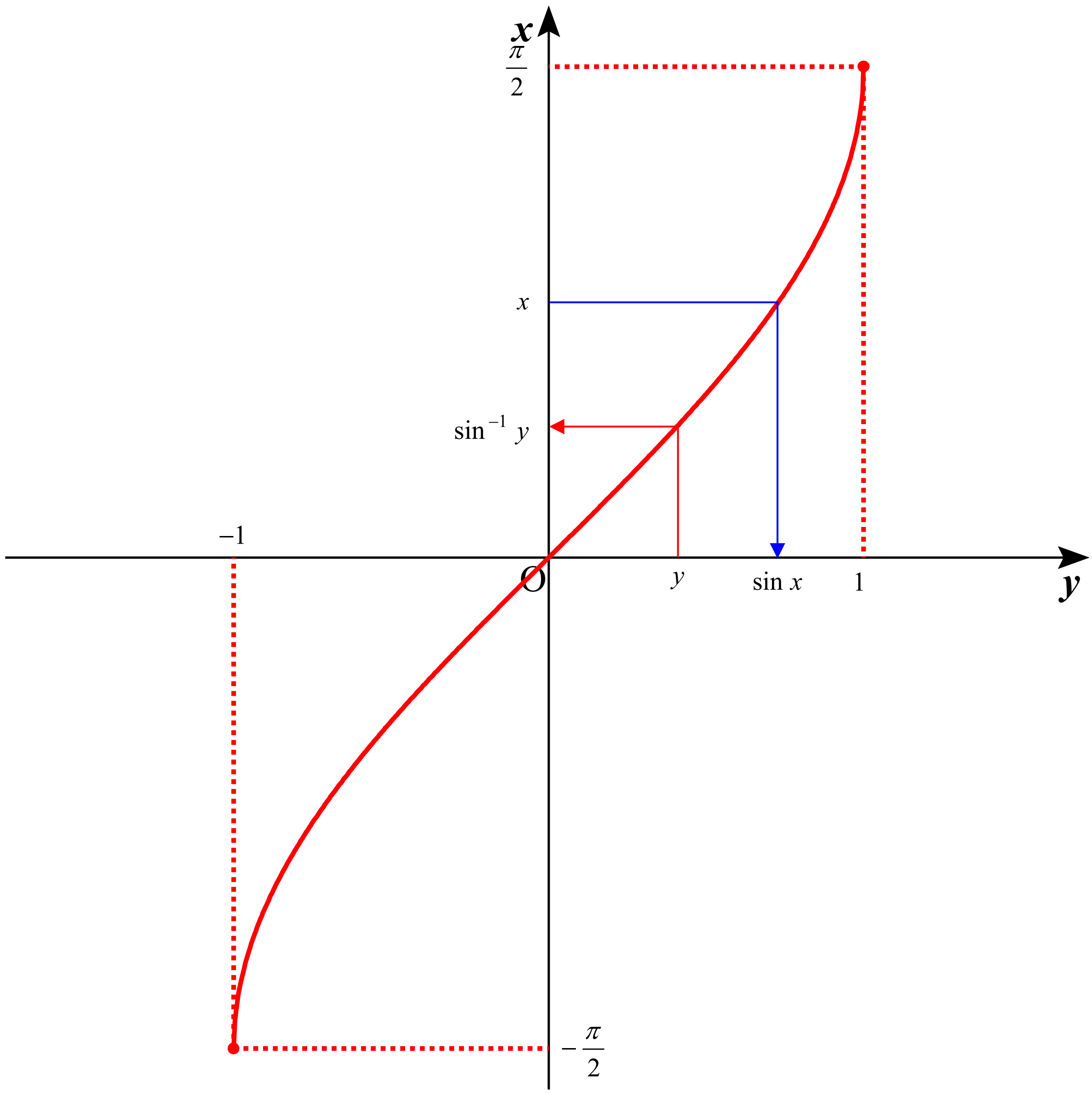
この関数を y の値から x の値へと逆向きに対応させた関数を，

すなわち $y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $x=\sin^{-1} y$ または $x=\arcsin y$ で表す。

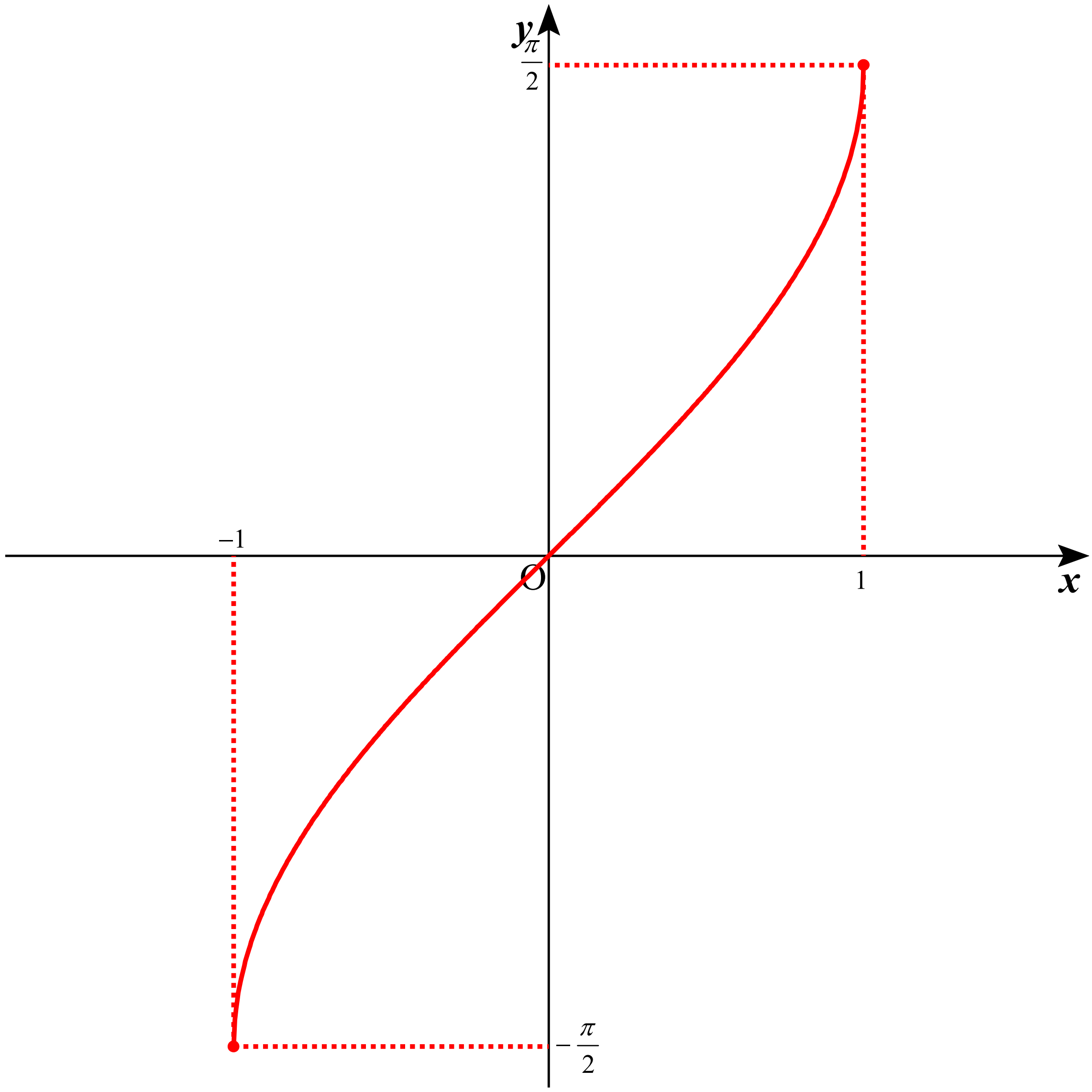
補足：$\sin^{-1} y$ は「アークサイン y」と読む。



さらに， $x=\sin^{-1}y$ では，定義域が y ，値域が x であることと
グラフを描く際に，定義域を横軸，値域を縦軸にとる習慣から，
$y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ のグラフを直線 $y=x$ を軸に 180° 回転することで，
$x=\sin^{-1}y$ のグラフとする。



そしてさらに，横軸は x，縦軸は y とする習慣から，
y を x， x を y に書き換えることにより， $y=\sin^{-1}x$ とし，
これを $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数と呼ぶことにする。

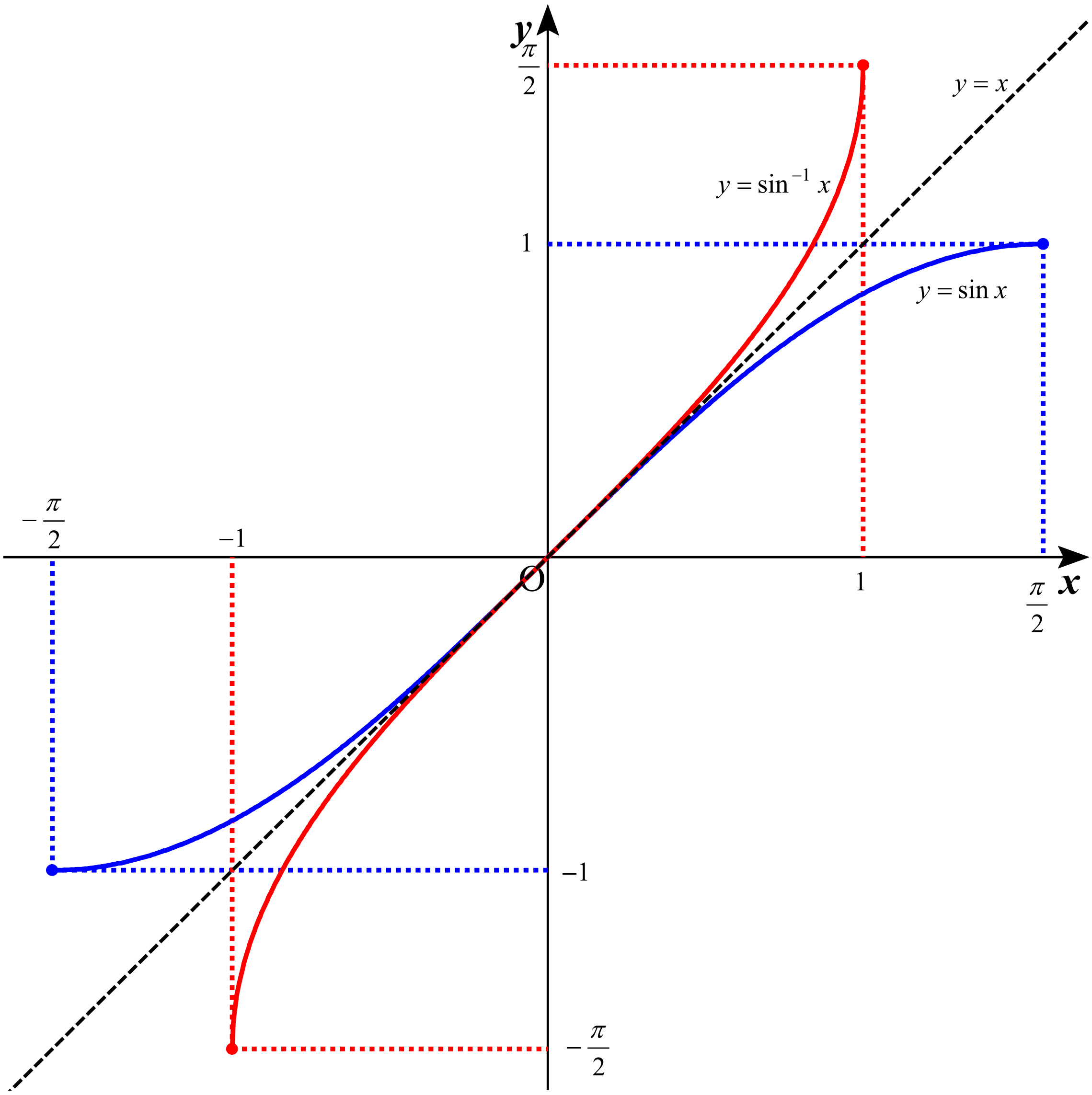


また，以上の経緯により，

$y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフと $y=\sin^{-1}x$ のグラフは $y=x$ に関して対称である。

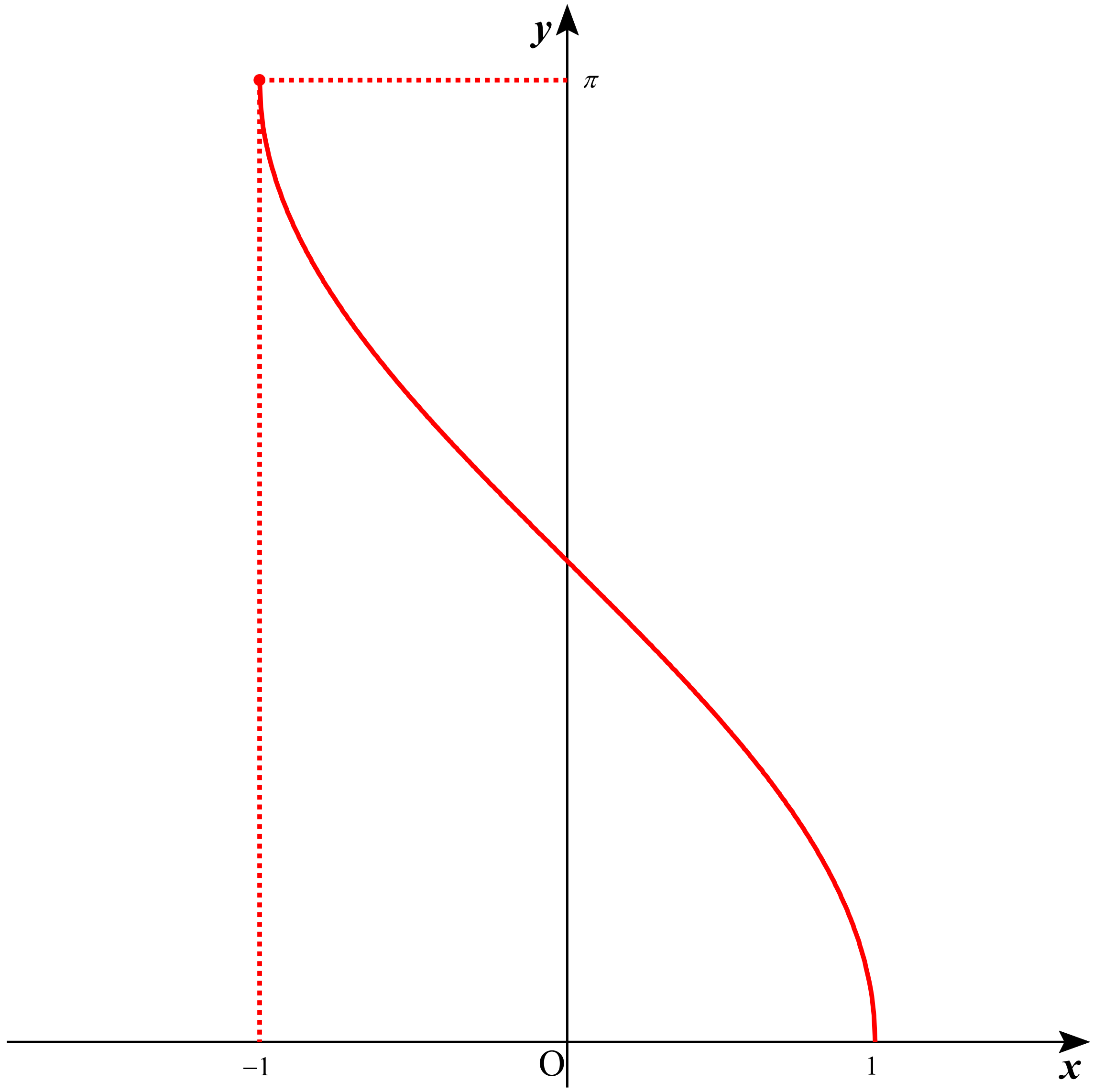
補足

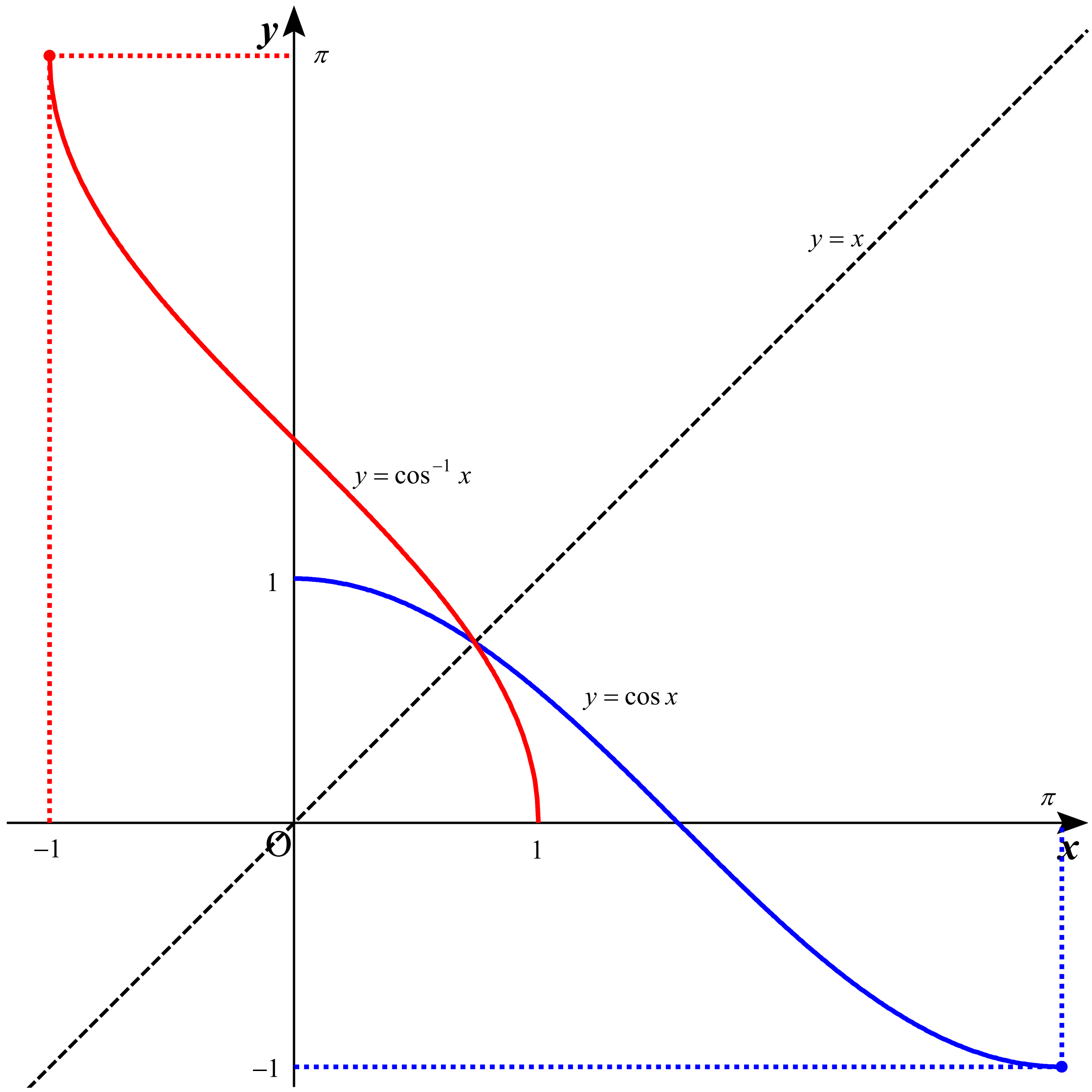
同様に，$y=f(x)$ のグラフとその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは $y=x$ に関して対称である。



2.　$y=\cos^{-1}x$

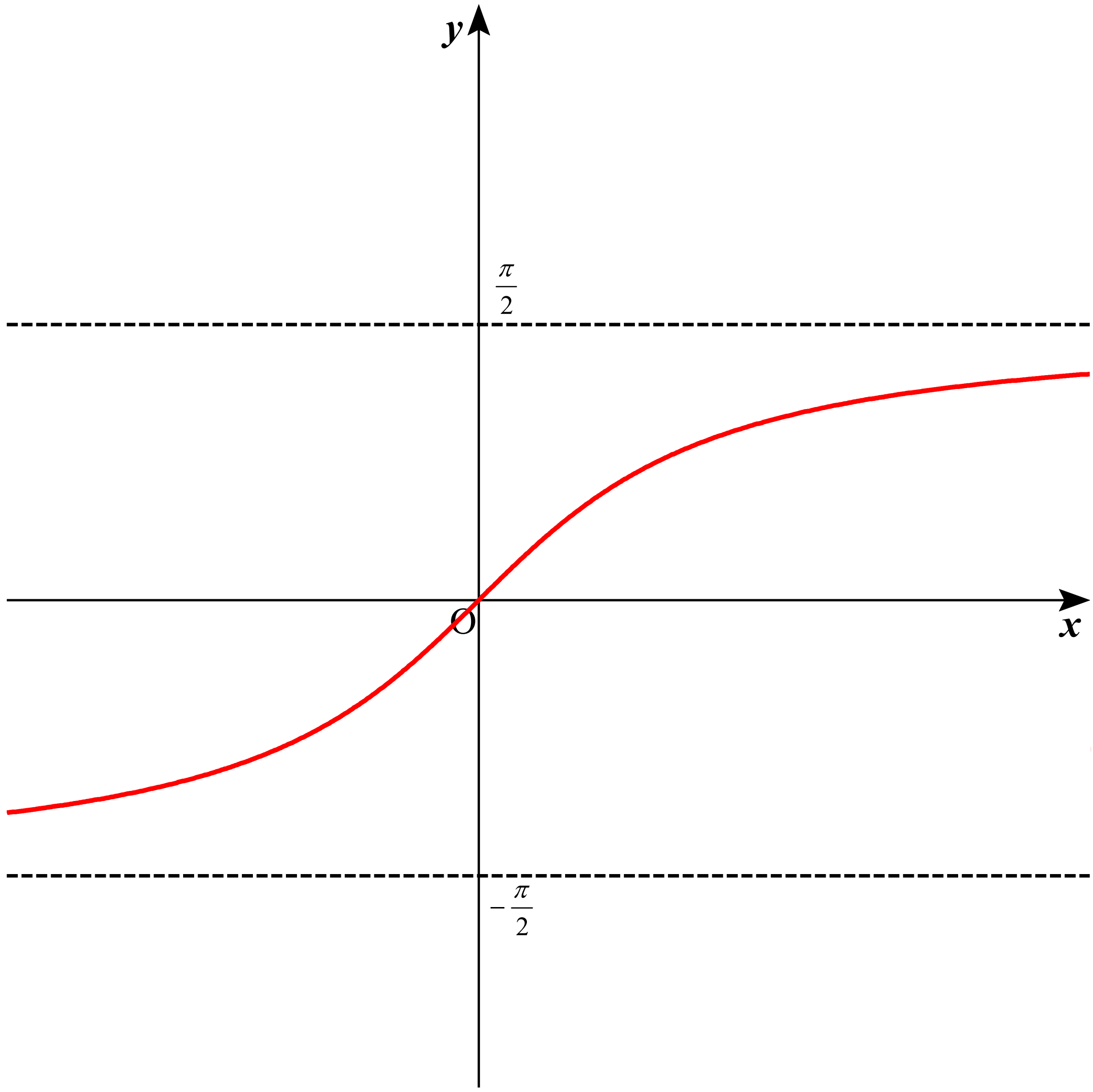
同様に，$y=\cos x\ (0\leq x\leq\pi)$ の逆関数を $y=\cos^{-1}x$ とする。

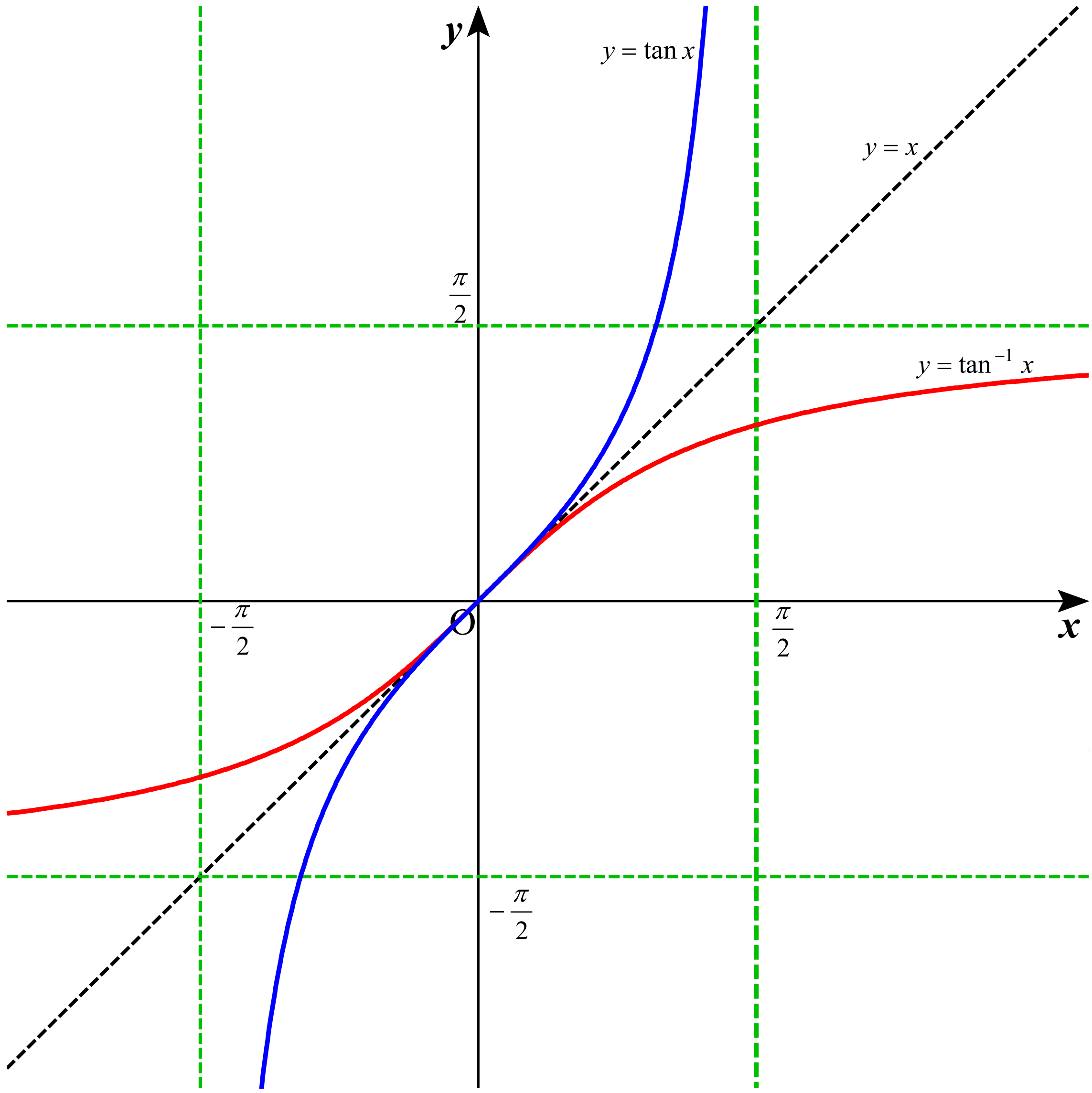



y
π
y = x
y = cos⁻¹ x
1
y = cos x
π
−1
O
1
x
−1

3.　$y = \tan^{-1} x$

同様に，$y = \tan x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \right)$ の逆関数を $y = \tan^{-1} x$ とする。




y
y = tan x
y = x
π/2
y = tan⁻¹ x
−π/2
O
π/2
x
−π/2

B.　逆三角関数の微分

1.　$y=\sin^{-1}x$ の微分

$y=\sin^{-1}x$ より，　$x=\sin y \left(-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$

両辺を x で微分すると，　$\frac{dx}{dx}=\frac{d\sin y}{dx}$ より，　$1=\frac{d\sin y}{dx}$

これと

$$\begin{aligned}\frac{d\sin y}{dx}&=\frac{d\sin y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\\&=\cos y\cdot\frac{dy}{dx}\\&=\sqrt{1-\sin^2 y}\cdot\frac{dy}{dx}\\&=\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

より，　$1=\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx}$

よって，　$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，　すなわち，　$\left(\sin^{-1}x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

また，　$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ から，　$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=y+C\left(x=\sin y,-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$（$C$ は積分定数）

2.　$y=\cos^{-1}x$ の微分

$y=\cos^{-1}x$ より，　$x=\cos y\ (0\le y\le\pi)$

両辺を x で微分すると，　$\frac{dx}{dx}=\frac{d\cos y}{dx}$ より，　$1=\frac{d\cos y}{dx}$

これと

$$\begin{aligned}\frac{d\cos y}{dx}&=\frac{d\cos y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\\&=-\sin y\cdot\frac{dy}{dx}\\&=-\sqrt{1-\cos^2 y}\cdot\frac{dy}{dx}\\&=-\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

より，　$1=-\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx}$

よって，　$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，　すなわち，　$\left(\cos^{-1}x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.　$y = \tan^{-1} x$ の微分

$y = \tan^{-1} x$ より，$x = \tan y \left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \right)$

両辺を x で微分すると，$\dfrac{dx}{dx} = \dfrac{d \tan y}{dx}$ より，$1 = \dfrac{d \tan y}{dx}$

これと

$$\begin{aligned}\frac{d \tan y}{dx} &= \frac{d \tan y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \left(1 + \tan^2 y\right) \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= 1 + x^2 \cdot \frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

より，$1 = \left(1 + x^2\right) \cdot \dfrac{dy}{dx}$

よって，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1 + x^2}$，すなわち，$\left(\tan^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

また，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1 + x^2}$ から，$\displaystyle\int \frac{dx}{1 + x^2} = y + C \left(x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$（$C$ は積分定数）